

学校编码: 10384

分类号_____ 密级_____

学号: 19020110153985

UDC_____

廈門大學

博 士 学 位 论 文

双曲守恒律高阶HWENO数值方法研究

High-Order HWENO Finite Difference
Method for Hyperbolic Conservation Laws

刘 红 霞

指导教师姓名: 邱 建 贤 教授

专 业 名 称: 计 算 数 学

论文提交日期: 2014 年 4 月

论文答辩日期: 2014 年 5 月

学位授予日期: 2014 年 月

答辩委员会主席: _____

评 阅 人: _____

2014 年 4 月

厦门大学学位论文原创性声明

本人呈交的学位论文是本人在导师指导下,独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考其他个人或集体已经发表的研究成果,均在文中以适当方式明确标明,并符合法律规范和《厦门大学研究生学术活动规范(试行)》。

另外,该学位论文得到国家自然科学基金重大研究计划-培育项目(项目资助号:91230110)、科技部国际合作项目(项目资助号:2010DFR00700)的资助,在厦门大学数学科学学院和福建省数学建模重点实验室和高性能科学计算实验室完成。

声明人(签名):

年 月 日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人同意厦门大学根据《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》等规定保留和使用此学位论文，并向主管部门或其指定机构送交学位论文（包括纸质版和电子版），允许学位论文进入厦门大学图书馆及其数据库被查阅、借阅。本人同意厦门大学将学位论文加入全国博士、硕士学位论文共建单位数据库进行检索，将学位论文的标题和摘要汇编出版，采用影印、缩印或者其它方式合理复制学位论文。

本学位论文属于：

- () 1、经厦门大学保密委员会审查核定的保密学位论文，
于 年 月 日解密，解密后适用上述授权。
- () 2、不保密，适用上述授权。

声明人（签名）：

日期： 年 月 日

导师签名：

日期： 年 月 日

中文摘要

本文我们构造了求解双曲守恒律的有限差分形式的埃尔米特加权本质无振荡 (HWENO, Hermite Weighted Essentially Non-oscillatory) 格式, 分别讨论了两种数值流通量的构造方法, 并研究比较了使用不同数值通量的加权本质无振荡 (WENO, Weighted Essentially Non-oscillatory) 格式对求解双曲守恒律结果的影响。

基于 WENO 格式的基本思想, 在 2004 年由 Qiu 和 Shu 提出了一类有限体积形式的 HWENO 格式。本文使用 Hermite 插值技术给出了 HWENO 高阶数值方法的有限差分形式, 时间项由 Runge-Kutta 方法向前推进, 求解一维和二维非线性双曲守恒方程(组)。HWENO 格式与 WENO 格式的重构不同, HWENO 格式的重构不仅需要用到函数值还要用到其相应的导函数值, 而 WENO 的重构只需要用到原函数值即可。与原始的 WENO 重构思想相比, HWENO 格式最主要的优点在于重构过程中它具有紧性。重构一个五阶精度的多项式, 若用 WENO 格式, 需要五个点的模板才能实现, 而用 HWENO 格式, 则只需三个点的模板即可实现。与经典的 WENO 格式相比, 本文的 HWENO 格式有如下不同:

- 同阶精度下使用的模板窄;
- 每个重构节点上有两个自由度;
- 求解方程包含导数方程。

对于 HWENO 格式的构造, 关键点在于构造数值通量函数, 我们给出了两种不同的构造方法:

(1) 基于 HWENO 有限差分形式的构造方法。这种方法需要将数值通量分裂成为迎风的两部分, 并要求分裂方法中的函数是光滑的。因此这种对数值通量的数学形式要求较高。

(2) 基于文献 [60] 中数值流通量构造的思想提出的方法。这种方法对空间项使用直接的有限差分离散, 用 Taylor 展开得到了一个新的显式的数值通量的表达形式, 并用 HWENO 插值及它的导出表达直接重构近似这个数值通量而达到高精度。

与(1)的方法相比, (2)中的方法处理通量的缺点是形式复杂, 计算量大。其优点是(2)中这种形式的通量, 其形式不受通量形式的限制, 任意形式的单调数值通量均可在此使用。

求解双曲守恒律的一个重要的环节是数值通量的处理, 针对(2)中数值通量的构造, 可采用任意形式的单调数值通量作为其基本模块情况, 我们研究比较了使用多种不同

数值通量的 WENO 格式, 主要针对一维守恒律研究比较了这些使用不同数值通量格式在 CPU 时间, 精度、无振荡性质以及分辨率方面的情况, 找出了在求解双曲守恒律问题中一些表现较好的数值通量, 并将这些性质较好的数值通量就二维问题做了计算。这个研究结果使我们更清楚的了解不同数值通量在求解双曲守恒律中的影响。

关键词: HWENO格式; 双曲守恒律; 高阶精度; 数值通量; 有限差分格式; 黎曼问题; 高分辨率; 高阶数值方法

厦门大学博硕士论文摘要库

Abstract

In this thesis, the Hermite Weighted Essentially Non-oscillatory (HWENO) finite difference schemes for solving conservation laws are proposed. At the same time, two different forms of numerical fluxes are discussed, respectively. Based on the discretization of the spatial terms by WENO schemes, the performance of different numerical fluxes is discussed. It makes us understand obviously the influence and performance of different numerical fluxes in solving the hyperbolic conservation laws.

In 2004, following the idea of WENO schemes, Qiu and Shu presented a class of finite volume Hermite WENO (HWENO) schemes. In this thesis, we propose a fifth order HWENO finite difference schemes for solving one dimensional and two dimensional nonlinear hyperbolic conservation law systems, by using the method of Hermite interpolation for spatial discretization, and nonlinear stable Runge-Kutta method for temporal discretization. The difference between HWENO schemes and WENO schemes is the reconstruction of polynomials. Both the function and its first derivative values are evolved in time and used in the reconstruction for HWENO schemes, while only the function values are evolved and used in the original WENO schemes. Comparing with the original WENO finite difference scheme of Jiang and Shu^[31], one major advantage of HWENO schemes is its compactness in the reconstruction. For example, five points are needed in the stencil for a fifth order WENO (WENO5) reconstruction, while only three points are needed for a fifth order HWENO (HWENO5) reconstruction. Comparing with the classic WENO schemes, the HWENO schemes have several significant differences as follows:

- The narrow stencil width maintain the high-order accuracy;
- Two degree of freedom are contained to each grid points;
- The spatial derivative equation is included.

The key important component of the HWENO schemes is to construct the numerical flux function, and two different methods to construct the flux are discussed as follows:

(1) The HWENO finite difference scheme with flux splitting is the first method. This approach is rigorous for the mathematical form of the numerical flux, which must be split into two parts by the upwind performance for stability.

(2) Another new form of HWENO finite difference schemes has also involved. Its

main idea is to explore a new formulation for constructing numerical fluxes in high order conservative HWENO finite difference schemes, originally designed in [60]. Concretely, Taylor expansion technique was used for the spatial discretization terms, achieving a high order form of numerical flux which is explicit.

Hermite interpolation polynomials, including the value of the function and its first derivatives, are defined to interpolate the solution and its derivatives. The formulation of numerical flux in (2), even though less clean and more computationally expensive than the traditional finite difference method in (1), it involves interpolations directly on the point values of the solution u_i rather than on the flux values. This lead to that a variety of numerical fluxes can be use here instead of only using the Lax-Friedrichs numerical flux in the traditional practice, breaking the limit of up-winding into the schemes of mathematical form.

We know that one of the important components to solve the conservation law is the numerical flux which performance sometimes can affect directly the numerical result pros and cons. In the result, we investigate the performance of the weighted essential non-oscillatory (WENO) methods based on different numerical fluxes, with the objective of obtaining better performance for the conservation laws by choosing suitable numerical fluxes. The detailed numerical study is performed for one dimensional cases, addressing the issues of CPU cost, accuracy, non-oscillatory property and the resolution of discontinuities. Numerical tests are also performed for two dimensional systems.

Key words: HWENO schemes; conservation laws; high-order accuracy; numerical flux; finite difference schemes; Riemann problem; high resolution; high order numerical methods

目 录

中文摘要	I
英文摘要	III
中文目录	V
英文目录	VII
第一章 绪论	1
1.1 研究的背景及意义	1
1.2 高分辨数值格式的回顾及研究的动机	2
1.3 有限差分WENO方法	5
1.4 本文主要工作内容	8
第二章 有限差分形式的HWENO格式	9
2.1 引言	9
2.2 一维HWENO格式	9
2.3 时间离散方法	19
2.4 保正的通量限制器	19
2.5 二维情形	21
2.6 数值结果与讨论	26
2.7 小结	38
第三章 有限差分HWENO格式的一种新形式	41
3.1 引言	41
3.2 问题的提出	41
3.3 方程的离散	43
3.4 五阶HWENO格式的重构	46
3.5 数值流通量中的高阶导数项	49
3.6 稳定性分析	51
3.7 二维情形	53
3.8 数值结果与讨论	56
3.9 小结	70

第 四 章 不同数值流通量的性质的研究	71
4.1 引言	71
4.2 数值格式	72
4.3 各种数值流通量	76
4.4 数值结果与讨论	81
4.5 小结	87
第 五 章 总结	91
参考文献	93
在学期间发表的学术论文与研究成果	99
致谢	101

Contents

Chinese Abstract	I
English Abstract	III
Chinese Contents	V
English Contents	VII
1 Preface	1
1.1 Background and significance	1
1.2 Motivation and high resolution numerical schemes	2
1.3 Finite difference WENO schemes	5
1.4 Main work	8
2 Upwind Finite Difference HWENO Schemes	9
2.1 Introduction	9
2.2 HWENO schemes for one dimensional case	9
2.3 Time discretization method	19
2.4 Positivity-preserving flux limiters	19
2.5 Extension to multiple dimensions	21
2.6 Numerical results and discussion	26
2.7 Summary	38
3 A New Form of HWENO schemes	41
3.1 Introduction	41
3.2 Raise the problem	41
3.3 Discrete of the equation	43
3.4 The reconstruction of fifth-order HWENO schemes	46
3.5 Higher derivative terms in numerical flux	49
3.6 Stability analysis	51
3.7 Extension to Multiple Dimensions	53

3.8 Numerical results	56
3.9 Summary	70
4 A Numerical Study for the Performance of Different Nu- merical Fluxes	71
4.1 Introduction	71
4.2 Numerical schemes	72
4.3 Various numerical fluxes	76
4.4 Numerical Results	81
4.5 Summary	87
5 Conclusion	91
References	93
Major Academic Achievements	99
Acknowledgements	101

第一章 绪论

本章主要介绍双曲守恒律的高分辨率加权本质无振荡(WENO, Weighted Essential Non-oscillatory)方法。第一节介绍本论文研究的背景及意义;第二节介绍双曲守恒律的高阶数值格式和发展及本文的研究动机;第三节介绍有限差分WENO方法的研究;最后一节给出论文的主要工作内容。

1.1 研究的背景及意义

描述流体运动的基本定律,包括质量守恒、动量守恒和能量守恒律的数学方程组是计算流体力学研究问题的出发点。这些方程是任何流动都必须遵守的三个基本的物理学原理,它们是这些原理的数学描述:1)质量守恒定律;2)动量守恒定律;3)能量守恒定律。本文主要研究由这些基本定律抽象出的一类典型的方程组——双曲守恒方程的数值求解。

在流体力学的流体描述中,有许多问题都可以用非线性双曲守恒律方程来描述^[81]。即当流体运动的雷诺数 Re 足够大且我们所感兴趣的只是定常和非定常的宏观流动时,流体的粘性效应可以忽略不计。如各种飞行器绕流的流场,在雷诺数足够大时,物面附近的粘性边界层厚度很薄,它对飞行器表面压力分布及其定常气体特性的影响可忽略不计。对于双曲型方程在数学上的典型代表是Euler方程,想通过解析的方法对方程直接进行分析,进而寻求封闭形式的解析解,数学上困难很大。因此,非线性双曲守恒律的数值解法一直是计算流体力学研究的重要课题之一。目前常用的数值方法有:有限体积方法(Finite Volume Method,简称FVM)、有限差分方法(Finite Difference Method,简称FDM)、有限元方法(Finite Element Method,简称FEM)、间断(Discontinuous)有限元方法等等。

近年来,高精度、高分辨率数值格式已被广泛应用到计算流体力学(Computational fluid dynamics,简称CFD)问题中,来有效地解决当前计算机容许网格下的复杂流体问题。数值解的分辨率一般指数值解对所感兴趣的流体流动的刻画能力。高分辨率数值格式指该格式的解能较精细地刻画较小尺度的流动结构的流动特性。本文所指的高精度格式是指高于二阶精度的格式。传统上,对于一般的工程问题,二阶精度格式基本可以满足需要。由于所要求解的问题日趋复杂,很多问题要求数值方法对流场特性有更强的模拟能力,这就需要通过提高数值解的分辨能力。当然,这一目的可以通过网格技术来实现,即增加计算区域内网格点的数目。但对非定常多尺度复杂流场的数值模

拟, 单利用网格技术解决问题也存在较大的困难, 对于二维或三维方程的求解, 目前经常要受到计算机的计算能力的限制。数值解的分辨率也可以通过对网格点上的逼近精度来实现, 即高阶精度的数值方法。它的使用希望能很好地捕捉到小扰动量, 而且要求这一小扰动量在很长的时间内能得到正确的描述。另一个典型的例子是湍流的计算, 这类问题要求所采用的方法既能描述大尺度的宏观结构, 又要能正确反映出小尺度流动结构的影响。尤其对于非线性双曲守恒律的数值求解, 还有一个非常尖锐的问题: 即不管初始条件多么光滑, 随着时间的发展, 方程的解也可能出现间断。这给方程的数值求解带来很大的困难。如果使用低阶数值格式求解, 由于数值粘性较大, 导致数值结果在间断处的信息被严重涂抹, 分辨率不高。但是对于带有间断的问题, 如激波问题, 如果使用高阶数值方法求解, 在光滑区域可以达到高阶精度, 但是在间断处会出现虚假的数值振荡, 有时数值振荡掩盖了物理的振荡, 甚至致使算法被“爆掉”。而针对这种含有激波和光滑区域复杂解存在的问题, 1987 年 Ami Harten 提出了高阶本质无振荡的数值方法——ENO (Essential Non-oscillatory) 方法^[23]。

采用高精度的数值方法会带来新的问题, 如边界条件的处理更为困难。本论文将研究一种高精度、高分辨率的数值方法, 该方法具有紧性, 使得边界条件及复杂几何结构更易处理。并且针对双曲问题中带有激波和间断的问题, 有更高的分辨率。通过线性模型方程数值解的行为给出了特性分析, 同时对非线性方程给出了良好的计算结果。

1.2 高分辨数值格式的回顾及研究的动机

双曲守恒律方程和对流占优的偏微分方程在许多的工业及生产、实验、应用中起着举足轻重的作用, 如空气动力学、浅水波模型问题等。而求解这两类方程时, 不管是从数学上还是数值方法上都存在一个共同的困难: 非线性方程的解可能出现间断, 既使是在问题的初始值充分光滑时也会如此。从而寻求鲁棒的、高精度、高效的求解这类方程的数值方法吸引了越来越多的科研和工程技术人员。因此, 双曲守恒律的高分辨率、高精度算法是可压缩计算流体力学和偏微分方程数值解领域的研究前沿和持续研究热点。它在国防、能源和工业领域有着广泛的应用。而近几十年来, 针对这类方程也提出了不少的高阶数值方法。而在所有这些高分辨率的数值方法中, 本质无振荡 (又称 ENO 格式, Essential Non-oscillatory) 格式和加权本质无振荡 (又称 WENO 格式, Weighted Essential Non-oscillatory) 格式^[14,58]在求解含有激波、接触间断和复杂光滑解结构时, 是人们乐意选择的数值格式。

1987 年, Harten 等人首次提出了有限体积的 ENO 方法^[24,26], 它可以是

Degree papers are in the “[Xiamen University Electronic Theses and Dissertations Database](#)”. Full texts are available in the following ways:

1. If your library is a CALIS member libraries, please log on <http://etd.calis.edu.cn/> and submit requests online, or consult the interlibrary loan department in your library.
2. For users of non-CALIS member libraries, please mail to etd@xmu.edu.cn for delivery details.

厦门大学博硕士论文摘要库